第２講　指数・対数関数①

【CHECK & UP】

1　次の方程式・不等式を解け．

(1)　$3^{x-1}=9\sqrt[3]{3}$

(2)　$3^{x}<\dfrac{2}{3^{x}}-1$

(3)　$3^{x+1}=2$

2　次の方程式・不等式を解け．

(1)　$\log_4 x^2-2\log_x 2+1=0$

(2)　$\log_3(x-2)+\log_3(x-3)-\log_3(x+1)\leqq 0$

3　関数 $y=4\cdot 8^x-24\cdot 4^x+57\cdot 2^x-73+57\cdot 2^{-x}-24\cdot 4^{-x}+4\cdot 8^{-x}$ について次の問いに答えよ．

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，t の最小値を求めよ．

(2)　y を t で表せ．

(3)　$y=f(t)$ としたとき，$f(t)$ を因数分解せよ．また，$y=f(t)$ のグラフを考えることにより，y の最小値とそれをとる x の値を求めよ．

4　$\log_3 y\leqq 1+\log_3(x+2)$，$\log_3 y\leqq 1+\log_3(10-7x)$，$1+\log_3 y\leqq \log_3(20-3x)$ の表す領域 D について，次の問いに答えよ．

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x-2y$ の最小値を求めよ．

＜ Note ＞

1 ［1］ (1) 関数 $f(x)=3^x+3^{-x}$ に対して $f(x-1)=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\cdot 3^x+\boxed{ウ}\cdot 3^{-x}$ である．

また，$f(x-1)=f(x)$ を満たす x を求めると，$x=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ であり，

このときの $f(x)$ の値は $\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である．

(2) 関数 $y=\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)$ ……① のグラフは，関数 $y=\log_2 x$ ……②

のグラフを x 軸方向に $\boxed{ケコ}$，y 軸方向に $\boxed{サシ}$ だけ平行移動したものである．

①と②のグラフの共有点の座標は $(\boxed{ス},\ 1+\log_2\boxed{セ})$ である．

［2］ p，q は実数で，$p>0$，$p\neq 1$ とする．x の方程式

$$5p^x-\frac{1}{p^x}=q\left(p^x+\frac{1}{p^x}\right)$$

を考える．

(1) 与えられた方程式が解をもつような q の範囲を求めよう．

与えられた方程式を変形すると

$$p^{\boxed{ア}x}(\boxed{イ}-q)=\boxed{ウ}+q$$

となる．この方程式が解をもつのは $\boxed{イ}-q$ と $\boxed{ウ}+q$ が同符号のときであるから，求める範囲は

$$\boxed{エオ}<q<\boxed{カ}$$

である．

(2) $p=3$，$q=\dfrac{1}{2}$ のとき，$p^x=\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ であるから $x=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ である．

< Note >

2 ［1］ 不等式 $2\log_3 x-4\log_x 27\leqq 5$ ……（＊） が成り立つような x の範囲を求めよう.

（1） 不等式（＊）において，x は対数の底であるから　$x>$ **ア** かつ $x\neq$ **イ**

を満たさなければならない．また，$\log_x 27=\dfrac{\boxed{ウ}}{\log_3 x}$ である.

（2） 不等式（＊）は

ア $<x<$ **イ** のとき　**エ** $(\log_3 x)^2-$ **オ** $\log_3 x-$ **カキ** $\geqq 0$

$x>$ **イ** のとき　**エ** $(\log_3 x)^2-$ **オ** $\log_3 x-$ **カキ** $\leqq 0$

と変形できる．したがって，求める x の値の範囲は

ア $<x\leqq\dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$，**イ** $<x\leqq$ **コサ**

である.

［2］ a を定数とする．不等式

$\log_2(x+a)+\log_2(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}(4-4a)<0$ ……（＊）

が成り立つような x の値の範囲を求めよう.

対数の真数は正であるから

$x>$ **アイ**，$x>$ **ウ**，$a<$ **エ**

である．また，不等式（＊）は

$(x+$ **オ** $-$ **カ** $)(x+$ **キ** $)<0$

と変形できる.

したがって，不等式（＊）を満たす x の値の範囲は

$a<-$ **ウ** のとき **クケ** $<x<$ **コ** $-$ **サ**

$-$ **ウ** $\leqq a<$ **エ** のとき **シ** $<x<$ **ス** $-$ **セ**

である.

＜ Note ＞

3　a は実数とする．x の方程式

$$(2^x+3^x)\left(\frac{9}{2^x}+\frac{4}{3^x}\right)=a \quad \cdots\cdots①$$

について考える．

(1)　$X=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ とおけば，方程式①は X を用いて

$$\boxed{\text{ア}}X+\frac{\boxed{\text{イ}}}{X}+\boxed{\text{ウエ}}=a \quad \cdots\cdots②$$

となる．

方程式②が異なる二つの正の解をもつのは

$$a>\boxed{\text{オカ}}$$

のときである．このとき，方程式①は異なる二つの解をもち，それらの和は $\boxed{\text{キク}}$ であることがわかる．

(2)　$a=50$ とする．方程式②の解は

$$X=\boxed{\text{ケ}},\ \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

であるから，方程式①の解は

$$x=\frac{\boxed{\text{シ}}}{\log_2 3-\boxed{\text{ス}}},\ \frac{\boxed{\text{セソ}}\log_2 3}{\log_2 3-\boxed{\text{ス}}}$$

となる．

＜ Note ＞

第2講　指数・対数関数①

1　x, t は実数で

$$\log_3(x+3^t)=2t-2$$

を満たしているとする.

(1)　x は t を用いて

$$x=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\cdot 3^{\boxed{\text{ウ}}t}-\boxed{\text{エ}}^{\,t}$$

と表される.

(2)　$t=0$ のとき, $x=\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である.

(3)　$x=2\cdot 3^t$ のとき, $t=\boxed{\text{ク}}$ である.

(4)　$x=-\dfrac{9}{4}$ のとき, $t=2-\log_3\boxed{\text{ケ}}$ である.

2　$a=\log_3 x$，$b=\log_9 y$ とする．

（1）　$y=9^b$ であるから，［ア］$b=\log_3 y$ である．

（2）　$x^2y=\dfrac{1}{3}$ ならば，$a+b=\dfrac{\text{［イウ］}}{\text{［エ］}}$ である．

（3）　$a+2b=3$ ならば，$x+y$ の最小値は［オ］$\sqrt{\text{［カ］}}$ である．

（4）　$ab=2$ ならば，$x>1$，$y>1$ のときの xy の最小値は［キク］である．

3　実数 a に対し，x の方程式

$$\log_4(x-1)+\log_4(4-x)=\log_4(a-x) \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．これを解くことは

$$1<x<4 \quad \text{かつ} \quad x<\boxed{\text{ア}}$$

の範囲で方程式

$$-x^2+\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}=a \quad \cdots\cdots ②$$

を解くことと同じである．

(1)　2次方程式②は，$a=\boxed{\text{エ}}$ のとき重解 $x=\boxed{\text{オ}}$ をもつ．したがって，方程式①が，ただ一つの解をもつのは

$$a=\boxed{\text{エ}} \ \text{または}\ \boxed{\text{カ}}<a\leqq\boxed{\text{キ}}$$

のときである．

(2)　$a=\boxed{\text{キ}}$ のときの方程式①の解は，$x=\boxed{\text{ク}}$ である．そのときの①の右辺の値は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である．

< Note >

第２講　指数・対数関数①

【CHECK & UP】

1 (1)　$3^{x-1}=3^2\cdot3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{7}{3}}$　より　$x-1=\dfrac{7}{3}$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\dfrac{10}{3}}$

(2)　$3^x<\dfrac{2}{3^x}-1$　　$3^x=t$ とおくと　$t<\dfrac{2}{t}-1$

（$t>0$ のとき対応する x が存在する．よって）

$t>0$ より　$t^2<2-t$

$t^2+t-2<0$　　$(t+2)(t-1)<0$　　$-2<t<1$

$t>0$ より　$0<t<1$

よって　$(0<)3^x<1$　　$3^x<3^0$　　ゆえに　$\boldsymbol{x<0}$

(3)　$3^{x+1}=2$　より　$x+1=\log_3 2$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\log_3 2-1}$

> 基本は「相等」．底が揃っている指数関数で「1：1」状態にし，その指数部分を見る．指数方程式で項が３項（以上）に分かれている場合は単純比較ができないため「置き換え型」，つまり整式の高次方程式として扱い，最後に「相等」を用いる．その場合，置き換えたものがプラスでないと，元に戻したときに解が存在しないので注意しよう．
> 「相等」をベースに「大小」を考える．このときは「底」a が $a>1$ か $0<a<1$ かで不等号の向きが変わるので注意．
> 底が異なる「1：1型」は，「対数」を用いる．しっくりこない人は，$x^2=3$ の解に「$\sqrt{\ }$」という記号を用いたことを思いだそう．２乗して 3 になる数は存在するが表せないので $\sqrt{\ }$ を用いた．同じく 3 を何乗すると 2 になるか．それを「$\log_3 2$」と表すのである．

2 (1)　$\log_4 x^2-2\log_x 2+1=0$

$\log_4 x^2=2\log_4 x$

$\log_x 2=\dfrac{\log_4 2}{\log_4 x}=\dfrac{1}{\log_2 4}\cdot\dfrac{1}{\log_4 x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\log_4 x}$ より

$2\log_4 x-\dfrac{1}{\log_4 x}+1=0$

$\log_4 x=t$ とおくと　$2t-\dfrac{1}{t}+1=0$　　$2t^2+t-1=0$

$(2t-1)(t+1)=0$　　$t=\dfrac{1}{2}$，-1

$\log_4 x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{2}$

$\log_4 x=-1$ より　$x=4^{-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2)　$\log_3(x-2)+\log_3(x-3)-\log_3(x+1)\leqq 0$

(真数)>0 より　$x>2$，$x>3$，$x>-1$　ゆえに　$x>3$

$\log_3(x-2)(x-3)\leqq\log_3(x+1)$

よって　$(x-2)(x-3)\leqq x+1$　　$x^2-6x+5\leqq 0$

$(x-1)(x-5)\leqq 0$　　ゆえに　$1\leqq x\leqq 5$

これと，$x>3$ より　$\boldsymbol{3<x\leqq 5}$

> 対数に関しても「相等」が基本であるが，「底の変換」により底を揃えることが大前提．その上で「真数」が同じものが複数あれば「置き換え型」→「1：1」に持ち込むことができる．ただし log はあくまで「底を何乗すると真数になるか」を表したもの．log の値を出す，log の値から真数を出す，いずれにしてもそれを忘れてはいけない．
> また，真数は底を何乗かした結果であるから「正」でなければならない．いわゆる「真数条件」と呼ばれるものである．最初に真数条件を考える，最後に真数が正かどうか検証する，いずれにしても忘れてはならない．

> 対数方程式・不等式で，log の真数部分に「和・差」の形を含む場合は，形の異なる log が残って置き換えることができないことがある．その場合は，１つにまとめて「1：1型」に持ち込む．
> 注意点は「差」である．
> $\log_a M-\log_a N=\log_a\dfrac{M}{N}$ であるが，方程式・不等式でこの形に持ち込むことはない．なぜなら「移項」により「差」のマイナスは「和」のプラスに変わるからである．もちろん関数の場合は移項ができないためにやむを得ない．
> 対数の大小に関しても，指数と同様「相等」をベースに「大小」を考える．「底」a が $a>1$ か $0<a<1$ かで不等号の向きが変わる．

3 (1)　相加平均≧相乗平均より　$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

等号成立は　$2^x=2^{-x}$　つまり　$x=-x$ より　$x=0$ のとき

よって t の最小値は $\mathbf{2}$

> 指数関数は「正」であり，かつそれを「隠す」ことができるため，「相加平均≧相乗平均」とは入試的に相性がよい．

(2)　$y=4\cdot 8^x-24\cdot 4^x+57\cdot 2^x-73+57\cdot 2^{-x}-24\cdot 4^{-x}+4\cdot 8^{-x}$

$=4(8^x+8^{-x})-24(4^x+4^{-x})+57(2^x+2^{-x})-73$

$=4\{(2^x)^3+(2^{-x})^3\}-24\{(2^x)^2+(2^{-x})^2\}+57(2^x+2^{-x})-73$

$=4\{(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})\}-24\{(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\}+57(2^x+2^{-x})-73$

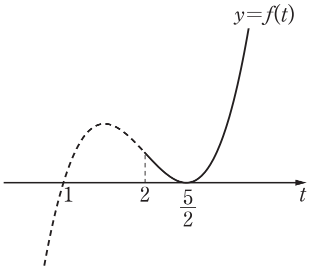
$=4(t^3-3t)-24(t^2-2)+57t-73$

$=\mathbf{4t^3-24t^2+45t-25}$

> 指数のマイナスは「逆数」であるが，「対称式変形」ではこのようにそのままにしておくことも．

(3)　$y=f(t)=\mathbf{(t-1)(2t-5)^2}$　また，(1)より　$t\geqq 2$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右図．



したがって　$t=\dfrac{5}{2}$ のとき　y は最小値 $\mathbf{0}$ をとる．

> 「微分法」を用いることも可能であるが，「因数分解」された式よりグラフがわかる．後の「微分法・積分法」の講を参照されたし．因数分解は「組立除法」が便利．

$t=\dfrac{5}{2}$ より　$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$　　$2^x+\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{5}{2}$

$2^x=s$ とおくと　$s+\dfrac{1}{s}=\dfrac{5}{2}$　　$2s^2-5s+2=0$

$(2s-1)(s-2)=0$　　$s=\dfrac{1}{2}$，2　　$2^x=\dfrac{1}{2}$，2　　ゆえに　$\mathbf{x=-1,\ 1}$

4 (1)　(真数)>0 より　$y>0$，$x>-2$，$x<\dfrac{10}{7}$，$x<\dfrac{20}{3}$

よって　$-2<x<\dfrac{10}{7}$　かつ　$y>0$

$1+\log_3(x+2)=\log_3 3+\log_3(x+2)=\log_3 3(x+2)$ より

$\log_3 y\leqq \log_3 3(x+2)$　　ゆえに　$y\leqq 3(x+2)$　……①

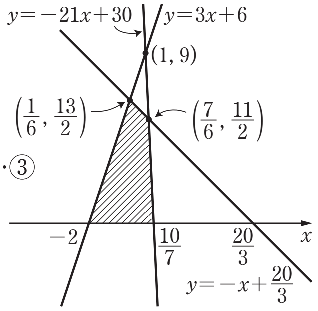
> $N=\log_a a^N$ である．1：1型を扱うときには必修である．

$1+\log_3(10-7x)=\log_3 3(10-7x)$ より

$\log_3 y\leqq 3(10-7x)$　　ゆえに　$y\leqq 3(10-7x)$　……②

$1+\log_3 y=\log_3 3y$ より

$\log_3 3y\leqq \log_3(20-3x)$　ゆえに　$y\leqq \dfrac{1}{3}(20-3x)$　……③



①，②，③と真数条件より，領域 D は右図斜線部

(境界は x 軸を含まず他は含む)．

(2)　$x-2y=k$ とおき，$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{k}{2}$ が領域 D を通るとき

y 切片 $-\dfrac{k}{2}$ が最大になるときを求める.

それは，グラフより $\left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{13}{2}\right)$ を通るときである.

ゆえに，k の最小値は　$\dfrac{1}{6}-2\cdot\dfrac{13}{2}=-\mathbf{\dfrac{77}{6}}$　である.

「線形計画法」をモチーフとした問題. 領域の境界が交わる点を求めておこう.

※指数関数・対数関数のセンター試験における難易度は，三角関数と比較すると比較的落ち着いている. ただし変形のスピードや正確性に欠けると時間を浪費しやすい. また，センター試験全体に言えることだが，誘導の意味を見失うと途中で何をやっているのかわからなくなる. 最終的に何を出したいのかについて，問題全体を眺めてから解き始めることをお勧めしたい.

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1

［1］ (1) $f(x)=3^x+3^{-x}$　より　$f(x-1)=3^{x-1}+3^{-x+1}=\mathbf{\frac{1}{3}}\cdot 3^x+\mathbf{3}\cdot 3^{-x}$

$f(x-1)=f(x)$　より　$\frac{1}{3}\cdot 3^x+3\cdot 3^{-x}=3^x+3^{-x}$

$\frac{2}{3}\cdot 3^x=2\cdot 3^{-x}$　　$3^{x-1}=3^{-x}$　　$x-1=-x$　　ゆえに　$x=\mathbf{\frac{1}{2}}$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

(2) $y=\log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)=\log_2\frac{1}{2}(x+6)=\log_2\frac{1}{2}+\log_2(x+6)=\log_2(x+6)-1$

このグラフは $y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に $\mathbf{-6}$，y 軸方向に $\mathbf{-1}$ 平行移動したものである．

2 グラフの共有点の x 座標は　$\log_2\left(\frac{x}{2}+3\right)=\log_2 x$　　$\frac{x}{2}+3=x$　より　$x=\mathbf{6}$

y 座標は　$\log_2 6=\log_2 2\cdot 3=1+\log_2\mathbf{3}$

［2］ (1) $5p^x-\frac{1}{p^x}=q\left(p^x+\frac{1}{p^x}\right)$ で $p^x=t$ とおくと，

$t>0$ である t の値 1 つにつき x が 1 つ対応する．

$5t^2-1=qt^2+q$　　$(5-q)t^2=1+q$　……①　　ゆえに　$p^{2x}(\mathbf{5}-q)=\mathbf{1}+q$

この t の方程式①が解をもつのは，$5-q$ と $1+q$ が同符号のときである．

よって　$(5-q)(1+q)>0$ より，求める q の範囲は　$\mathbf{-1}<q<\mathbf{5}$　である．

(2) $p=3$，$q=\frac{1}{2}$ のとき　$\frac{9}{2}t^2=\frac{3}{2}$　　$t^2=\frac{1}{3}$　　$t=+\frac{\sqrt{3}}{3}$

つまり　$3^x=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=3^{-\frac{1}{2}}$　より　$x=\mathbf{-\frac{1}{2}}$　である．

2 ［1］ $2\log_3 x-4\log_x 27\leqq 5$ ……（＊）

(1) 底の条件より　$x>\mathbf{0}$　かつ　$x\neq\mathbf{1}$

また　$\log_x 27=\dfrac{\log_3 27}{\log_3 x}=\dfrac{\mathbf{3}}{\log_3 x}$

(2) （＊）より　$2\log_3 x-\dfrac{12}{\log_3 x}\leqq 5$

$0<x<1$ のとき　$\mathbf{2}(\log_3 x)^2-\mathbf{5}\log_3 x-\mathbf{12}\geqq 0$ ……①

$x>1$ のとき　$2(\log_3 x)^2-5\log_3 x-12\leqq 0$ ……②

①で $\log_3 x=t$ とおくと　$t<0$　$2t^2-5t-12\geqq 0$　$t\leqq-\dfrac{3}{2}$，$4\leqq t$

$t<0$ より　$t\leqq-\dfrac{3}{2}$　よって　$\log_3 x\leqq-\dfrac{3}{2}$ より　$0<x\leqq 3^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

②で $\log_3 x=t$ とおくと　$t>0$　$2t^2-5t-12\leqq 0$　$-\dfrac{3}{2}\leqq t\leqq 4$

$t>0$ より　$0<t\leqq 4$　よって　$0<\log_3 x\leqq 4$ より　$1<x\leqq 3^4=81$

したがって，求める x の値の範囲は　$0<x\leqq\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{9}}$，$1<x\leqq\mathbf{81}$

［2］ $\log_2(x+a)+\log_2(x-3)+\log_{\frac{1}{2}}(4-4a)<0$

真数は正であることより　$x>-\boldsymbol{a}$　かつ　$x>\mathbf{3}$　かつ　$a<\mathbf{1}$

ここで　$\log_{\frac{1}{2}}(4-4a)=\dfrac{\log_2(4-4a)}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2(4-4a)$ であることより

$\log_2(x+a)(x-3)<\log_2(4-4a)$

$(x+a)(x-3)<4-4a$　$x^2+(a-3)x+a-4<0$　$(x+\boldsymbol{a}-\mathbf{4})(x+\mathbf{1})<0$

$a<1$ より　$3<4-a$　よって　$-1<x<4-a$

ゆえに　$3<-a$　つまり　$a<-3$ のとき　$-\boldsymbol{a}<x<\mathbf{4}-\boldsymbol{a}$

$-3\leqq a<1$ のとき　$\mathbf{3}<x<\mathbf{4}-\boldsymbol{a}$

3 ①より　$4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+9\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+13=a$

(1) $X=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ とおくと　$\mathbf{9}X+\dfrac{\mathbf{4}}{X}+\mathbf{13}=a$　$9X^2-(a-13)X+4=0$ ……②′

②′が $X>0$ に異なる２つの正の解をもつときを考える．

②′の判別式を D とすると　$D=(a-13)^2-4\cdot 9\cdot 4=(a-25)(a-1)$

②の左辺を $f(X)$ とすると，$f(0)=4>0$　また，$f(X)$ の軸は　$X=\dfrac{a-13}{18}$

よって　$(a-25)(a-1)>0$　$\dfrac{a-13}{18}>0$　であればよい．　ゆえに　$a>\mathbf{25}$

このとき，②は正の 2 解 X_1，X_2 をもち，それぞれに対して x が 1 つずつ対応する．

解と係数の関係より　$X_1 \cdot X_2=\dfrac{4}{9}$

$X_1=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x_1}$，$X_2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x_2}$　とすると

$$X_1 \cdot X_2=\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2}\qquad \text{つまり}\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1+x_2}=\frac{4}{9}$$

ゆえに　$x_1+x_2=\mathbf{-2}$

(2)　$a=50$ のとき

②は　$9X^2-37X+4=0$　　$X=\mathbf{4},\ \mathbf{\dfrac{1}{9}}$

$X=4$ のとき　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=4$　　よって　$x=\log_{\frac{3}{2}}4=\dfrac{\log_2 4}{\log_2\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{\log_2 3-1}$

$X=\dfrac{1}{9}$ のとき　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{1}{9}$　　よって　$x=\log_{\frac{3}{2}}\dfrac{1}{9}=\dfrac{\log_2\frac{1}{9}}{\log_2\frac{3}{2}}=\dfrac{-2\log_2 3}{\log_2 3-1}$

ゆえに　$x=\mathbf{\dfrac{2}{\log_2 3-1}},\ \mathbf{\dfrac{-2\log_2 3}{\log_2 3-1}}$

第２講　指数・対数関数①

1 (1)　$x+3^t=3^{2t-2}$　……①　より　$x=\mathbf{\frac{1}{9}\cdot3^{2t}-3^t}$

(2)　$t=0$ のとき　$x=\frac{1}{9}\cdot3^0-3^0=\frac{1}{9}-1=\mathbf{-\frac{8}{9}}$

(3)　$x=2\cdot3^t$ のとき　$\log_3(2\cdot3^t+3^t)=2t-2$

左辺は　$\log_3 3\cdot3^t=\log_3 3^{t+1}=t+1$　　よって　$t+1=2t-2$　　ゆえに　$t=\mathbf{3}$

【別解】　$x=2\cdot3^t$ のとき　①より　$2\cdot3^t+3^t=3^{2t-2}$

$3^{t+1}=3^{2t-2}$　　よって　$t+1=2t-2$　　ゆえに　$t=\mathbf{3}$

(4)　$x=-\frac{9}{4}$ のとき　(1)より　$-\frac{9}{4}=\frac{1}{9}(3^t)^2-3^t$

$3^t=X$ とおくと　$-\frac{9}{4}=\frac{1}{9}X^2-X$

$4X^2-36X+81=0$　　$(2X-9)^2=0$　　$X=\frac{9}{2}$

つまり　$3^t=\frac{9}{2}$ より　$t=\log_3\frac{9}{2}=2-\log_3\mathbf{2}$

2 (1)　$b=\frac{\log_3 y}{\log_3 9}=\frac{\log_3 y}{2}$　より　$2b=\log_3 y$

(2)　$a+b=\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 y=\frac{1}{2}(2\log_3 x+\log_3 y)$

$=\frac{1}{2}(\log_3 x^2+\log_3 y)=\frac{1}{2}\log_3 x^2y=\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

【別解】　$x^2y=\frac{1}{3}$　より　$\log_3 x^2y=\log_3\frac{1}{3}$　　$2\log_3 x+\log_3 y=-1$

よって　$2a+2b=-1$　より　$a+b=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(3)　$a+2b=\log_3 x+\log_3 y=\log_3 xy=3$　より　$xy=3^3=27$

このとき，相加平均と相乗平均の関係より　$x+y\geqq2\sqrt{xy}=2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$

等号成立は　$x=y$　かつ　$xy=27$　より　$x=y=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$　のとき．

ゆえに　$x+y$ の最小値は　$\mathbf{6\sqrt{3}}$

(4)　$x=3^a$，$y=9^b=(3^2)^b=3^{2b}$　より　$xy=3^a\cdot3^{2b}=3^{a+2b}$

よって，$a+2b$ が最小のとき，xy も最小となる．

$x>1$，$y>1$ より　$a>0$，$2b>0$ であるから　$a+2b\geqq2\sqrt{a\cdot2b}=2\sqrt{2\cdot2}=4$

等号成立は　$a=2b$　かつ　$ab=2$　より　$a=2$，$b=1$　のとき．

よって，$a+2b$ の最小値は 4　　ゆえに　xy の最小値は　$3^4=\mathbf{81}$

3　$\log_4(x-1)+\log_4(4-x)=\log_4(a-x)$　……①

①において真数条件より　$x>1$　かつ　$x<4$　かつ　$x<a$

つまり　$1<x<4$　かつ　$x<\boldsymbol{a}$　である．

このもとで，①すなわち　$\log_4(x-1)(4-x)=\log_4(a-x)$　　$-x^2+5x-4=a-x$

つまり　$-x^2+\mathbf{6}x-\mathbf{4}=a$　……②　を解く．

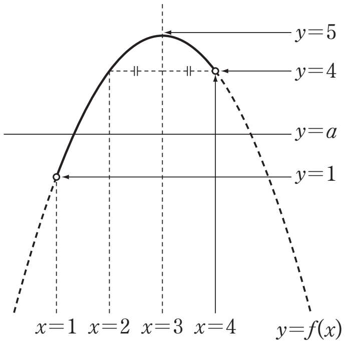
(1)　②の左辺を $f(x)$ とおき，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の x 座標について考える．

$$f(x)=-(x-3)^2+5$$

$a=\mathbf{5}$ のとき，②すなわち $f(x)=a$ は重解 $x=\mathbf{3}$ をもつ．

①がただ1つの解をもつのは，共有点が1つのとき．

よって　$a=5$　または　$\mathbf{1}<a\leqq\mathbf{4}$　のとき．



(2)　$a=4$ のとき図より $x=\mathbf{2}$

このときの①の右辺の値は　$\log_4 2=\dfrac{1}{\log_2 4}=\dfrac{1}{\mathbf{2}}$